No	$f(x)$ fonksiyonu	f nin türevi	f nin türevli olduğu küme
7.	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
8.	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
9.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
10.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
11.	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
12.	arccotx	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
13.	$\sinh x$	$\cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
14.	$\cosh x$	$\sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
15.	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
16.	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
17.	$\arcsin hx = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \in \mathbb{R}$
18.	$\mathrm{arccoshx} = \ln(\mathrm{x}+\sqrt{\mathrm{x}^2-1})$	$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$
19.	$\arctan hx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1,1)$
20.	$\mathrm{arccothx} = \frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-1}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$

(Tablo 4.1)

4.2.1 Çözümlü Problemler

(1) $X \subset \mathbb{R}; f, g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları ve X in limit noktası olan bir $x_0 \in X$ noktası verilmiş olsun. Aşağıdaki durumlarda $f+g, f.g, \frac{f}{g}$ fonksiyonlarının x_0 da türevlimidir?

(a) f, x_0 da türevli g, x_0 da türevli değildir.

(b) f ile g, x_0 da türevli değildir.

Çözüm: Çözümü $F(x) = f(x)g(x)$ fonksiyonu için yapalım. Genel olarak hayır. Örneğin, $x_0 = 0$ noktasında $f(x) = 1$ fonksiyonu türevli, $g(x) =\mid x \mid$ fonksiyonu türevli değildir. Bu durumda, $F(x) = 1. \mid x \mid =\mid x \mid$ fonksiyonu x_0 noktasında türevli değildir. $x_0 = 0$ noktasında $f(x) = x$ fonksiyonu türevli, $g(x) =\mid \sin x \mid$ fonksiyonu türevli değildir fakat $F(x) = x. \mid \sin x \mid$ fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasında türevlidir

(Çünkü, $F'(0) = 0$ dır). $x_0 = 0$ noktasında $f(x) =\mid x \mid$ ve $g(x) = - \mid x \mid$ fonksiyonları türevli değildir, fakat $F(x) = - \mid x \mid^2$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlidir (Çünkü, $F'(0) = 0$ dır). x_0 noktasında $f(x) = \text{sgn}x$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ve $F(x) = f(x)g(x)$ fonksiyonları $x_0 = 0$ da türevli değildir. $\diamond$

(2) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların türevlerini bulunuz. Türevin varolduğu kümeyi gösteriniz.

(a) $y = 7x^{13} + 13x^{-7}$; (b) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$;
(c) $y = x^3 \sqrt[3]{x^2} + x^7 \sqrt[3]{x}$; (d) $y = \frac{\sqrt{x}}{\tan x}$;
(e) $y = \cos(2^x - x^3)$; (f) $y = x^2 \cot x + 2$;
(g) $y = \arctan^2 x$; (h) $y = e^x \log_2 x$;
(i) $y = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\sin x)$; (j) $y = \arctan(\tanh x)$;
(k) $y = \ln(\coth \frac{x}{2})$; (l) $y = \log_x 2^x$;
(m) $y = 4^{x \tan \frac{x}{2}}$; (n) $y = 2^{\text{arccot}\sqrt{\text{x}^2+1}}$;
(o) $y = (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}$; (p) $y = (\tan \frac{x}{2})^{x \arcsin 2x}$;
(q) $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$; (r) $y = \ln^3 \arctan^2 \sqrt{\frac{1}{x^3}}$;
(s) $y = \frac{1}{a^2 - b^2} \arcsin(\frac{a \sin x + b}{a + b \sin x})$; $(a^2 - b^2 > 0)$.

Çözüm: Problemin çözümünü türev alma kurallarından (Bkz Teorem 4.2.1,4.2.3,4.2.4 ve 4.2.7)ve esas elemanter fonksiyonların türev formüllerinden yararlanarak çözeceğiz.

(a) $y' = (7x^{13})' + (13x^{-7})' = 7(x^{13})' + 13(x^{-7})'$

$$= 7.13x^{13-1} + 13(-7)x^{-7-1} = 91x^{12} + 91x^{-8}, x \neq 0 \ .$$

(b) $y' = (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{\frac{1}{3}})' + (x^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} + \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}, x > 0 \ .$$

(c) $y' = (x^3\sqrt[3]{x^2})' + (x^7\sqrt[3]{x})' = (x^3)'\sqrt[3]{x^2} + x^3(\sqrt[3]{x^2})' + (x^7)'\sqrt[3]{x} + x^7(\sqrt[3]{x})'$

$$\begin{aligned} &= 3x^2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}x^3x^{\frac{-1}{3}} + 7x^6\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}x^7x^{\frac{-2}{3}} \\ &= \frac{11x^2\sqrt[3]{x^2} + 22x^6\sqrt[3]{x}}{3}, x \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

(d) $y' = (\frac{\sqrt{x}}{\tan x})' = \frac{(\sqrt{x})'\tan x - \sqrt{x}(\tan x)'}{\tan^2 x} = \frac{\frac{\tan x}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{x}\sin x} - \frac{\sqrt{x}}{\sin^2 x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \ .$$

(e) $y' = (\cos(2^x - x^3))'[g(u) = \cos u$ ve $\mathrm{u = f(x) = 2^x - x^3}$ dersek]

$$\begin{aligned} &= (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) = -sinu.u' \\ &= -\sin(2^x - x^3).((2^x)' - (x^3)') \\ &= -(2^x\ln 2 - 3x^2)\sin(2^x - x^3), x \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

(f) $y' = (x^2\cot x + 2)' = (x^2\cot x)' + (2)'$

$$= (x^2)'\cot x + x^2(\cot x)' = 2x\cot x - \frac{x^2}{\sin^2 x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \ .$$

(g) $y' = (\arctan^2 x)'[g(u) = u^2$ ve $\mathrm{u = f(x) = \arctan x}$ dersek]

$$\begin{aligned} &= (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) = 2(f(x))f'(x) \\ &= 2\arctan x(\arctan x)' \\ &= \frac{2\arctan x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

(h) $y' = (e^x\log_2 x)' = (e^x)'\log_2 x + e^x(\log_2 x)' = e^x\log_2 x + \frac{e^x}{x\ln 2}$

$$= e^x(\log_2 x + \frac{1}{x\ln 2}), x > 0 \ .$$

(i) $y' = (\sin^2(\cos x))' + (\cos^2(\sin x))'$

$$\begin{aligned} &= 2\sin(\cos x)(\cos x)' + 2\cos(\sin x)(\sin x)' \\ &= -2\sin x\sin(\cos x) + 2\cos x\cos(\sin x), x \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

(j) $y' = \frac{1}{1+\tanh^2 x}(\tanh x)' = \frac{1}{1+\tanh^2 x}\frac{1}{\cosh^2 x}$

$$= \frac{1}{\cosh^2 x + \sinh^2 x} = \frac{1}{\cosh 2x}, x \in \mathbb{R}\ .$$

(k) $y' = \frac{1}{\coth\frac{x}{2}}(\coth\frac{x}{2})' = \frac{-1}{\coth\frac{x}{2}}\frac{1}{2\sinh^2\frac{x}{2}} = -\frac{1}{\sinh x}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

(l) $y' = (\log_x 2^x)' = (\frac{\log_2 2^x}{\log_2 x})' = (\frac{x}{\log_2 x})' = \frac{\log_2 x - x\frac{1}{x\ln 2}}{{\log^2}_2 x}$

$$= \frac{\ln x - 1}{\ln 2{\log^2}_2 x}, x > 0, x \neq 1\ .$$

(m) $y' = 4^{x\tan\frac{x}{2}}(x\tan\frac{x}{2})'\ln 4 = 4^{x\tan\frac{x}{2}}(x\tan\frac{x}{2} + \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}})\ln 4,$
$x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$

(n) $y' = 2^{\mathrm{arccot}\sqrt{\mathrm{x}^2+1}}(\mathrm{arccot}\sqrt{\mathrm{x}^2+1})'\ln 2 = 2^{\mathrm{arccot}\sqrt{\mathrm{x}^2+1}}\frac{-(\sqrt{\mathrm{x}^2+1})'}{1+(\sqrt{\mathrm{x}^2+1})^2}\ln 2$

$$= 2^{\mathrm{arccot}\sqrt{x^2+1}}\frac{-x}{(2+x^2)\sqrt{x^2+1}}\ln 2,\ \ x \in \mathbb{R}\ .$$

(o) $y' = ((\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}})'$ [(4.18) den]

$$\begin{aligned} &= (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}[(\frac{\sin x}{x})'\ln\arcsin x + \frac{\sin x}{x}\frac{(\arcsin x)'}{\arcsin x}] \\ &= (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}[\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\ln\arcsin x + \frac{\sin x}{x\sqrt{1-x^2}\arcsin x}], \end{aligned}$$

$x \in (0,1)$.

(p) $y' = ((\tan\frac{x}{2})^{x\arcsin 2x})' =$ [(4.18) den]

$$\begin{aligned} &= (\tan\frac{x}{2})^{x\arcsin 2x}[(x\arcsin 2x)'\ln\tan\frac{x}{2} + x\arcsin 2x\frac{(\tan\frac{x}{2})'}{\tan\frac{x}{2}}] \\ &= (\tan\frac{x}{2})^{x\arcsin 2x}[(\arccos 2x + \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}})\ln\tan\frac{x}{2} + \frac{x\arcsin 2x}{\sin x}], \end{aligned}$$

$x \in (0, \frac{1}{2})$.

(q) $y' = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2})' - \frac{a^2}{2}(\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}))'$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\sqrt{x^2-a^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}) - \frac{a^2}{2}\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})'}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \\
&= \frac{2x^2-a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{a^2}{2}\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \\
&= \frac{2x^2-a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} \\
&= \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}, x \in (-\infty, -\mid a \mid) \cup (\mid a \mid, +\infty)\ .
\end{aligned}$$

(r) $y' = 3\ln^2 \arctan^2 \sqrt{\frac{1}{x^3}} \frac{1}{\arctan^2 \sqrt{\frac{1}{x^3}}} .2 \arctan \sqrt{\frac{1}{x^3}} . \frac{1}{1+\frac{1}{x^3}} (-\frac{3}{2}x^{\frac{-5}{2}})$

$$= -\frac{9\ln^2 \arctan^2 \sqrt{\frac{1}{x^3}}}{\arctan \sqrt{\frac{1}{x^3}}} . \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}, x > 0\ .$$

(s) $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x})^2}} \frac{a\cos x(a+b\sin x) - b\cos x(a\sin x+b)}{(a+b\sin x)^2}$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{a^2-b^2}\frac{\cos x}{(a+b\sin x)\sqrt{(a^2-b^2)-(a^2-b^2)\sin^2 x}} \\
&= \frac{1}{a+b\sin x}, x \neq (-1)^{k-1} \arcsin \frac{b}{a} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ .
\end{aligned}$$

(3) Aşağıda parametrik denklemlerle verilen $y = y(x)$ fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.

(a) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1-\cos t), \quad 0 < t < 2\pi\ ; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad t \in \mathbb{R}\ ; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = t^3 + 3t \\ y = t \arctan t - \ln\sqrt{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}\ ; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2} \ ; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}, \quad 0 <\mid t \mid< 1 \ . \end{cases}$

Çözüm: Problemin çözümünü parametrik şekilde verilen fonksiyonların türevi için (4.20) formülünden faydalanarak yapacağız.

(a) $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları $(0, 2\pi)$ üzerinde türevlenebilirdir ve $x'_t = a(1-\cos t) \neq 0, y'_t = a\sin t$ olduğuna göre, (4.20) den dolayı

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \cot\frac{t}{2}$$

olur.

(b) $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir ve $x'_t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \neq 0, y'_t = \frac{-t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$ olduğuna göre, (4.20) den dolayı

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-t}{(1+t^2)}$$

olur.

(c) $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir ve $x'_t = 3(t^2+1) \neq 0, y'_t = \arctan t + \frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} = \arctan t$ olduğuna göre, (4.20) den dolayı

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\arctan t}{3(1+t^2)}$$

olur.

(d) $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları $(0, \frac{\pi}{2})$ üzerinde türevlenebilirdir ve $x'_t = 3a\cos^2 t\sin t \neq 0, y'_t = 3b\sin^2 t\cos t$ olduğuna göre, (4.20) den dolayı

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{b}{a}\tan t$$

olur.

(e) $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları $(-1, 1)\backslash\{0\}$ üzerinde türevlenebilirdir ve

$x'_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \neq 0, y'_t = \frac{-t}{|t|\sqrt{1-t^2}}$ olduğuna göre, (4.20) den dolayı

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \begin{cases} -1, & 0 < t < 1 \text{ ise}, \\ 1, & -1 < t < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. $\diamond$

(4) Aşağıdaki eşitliklerde kapalı şekilde tanımlanan $y = y(x)$ fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.

(a) $x^2 + 2xy - y^2 = 4x$; (b) $x^2 - 1 + \cos xy = 0$;
(c) $y - x = \varepsilon \sin y, |\, \varepsilon \,| < 1$; (d) $x + y = e^{x-y}$;
(e) $\arctan(x^2 + y^2) - \ln(xy) \quad -1 = 0, \quad xy > 0$.

Çözüm: (a) $y = y(x)$ fonksiyonu bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde verilen denklemin türevlenebilir bir çözümü, yani $x \in I$ için

$$x^2 + 2xy(x) - (y(x))^2 = 4x$$

olsun. Bu eşitlikte her iki tarafın x e göre türevini alalım. O halde,

$$2x + 2y(x) + 2xy'(x) - 2y(x)y'(x) = 4, x \in I \Rightarrow$$

$y(x) \neq x$ olmak üzere $y'(x) = \frac{y+x-2}{y-x}$ olur.
(b) $y = y(x)$ fonksiyonu bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde verilen denklemin türevlenebilir bir çözümü, yani $x \in I$ için

$$x^2 - 1 + \cos(xy(x)) = 0$$

olsun. Bu eşitlikte her iki tarafın x e göre türevini alalım. O halde,

$$2x - y\sin(xy) - y'(x)x\sin(xy) = 0, x \in I \Rightarrow$$

$y\sin(xy) \neq 0$ olmak üzere $y'(x) = \frac{2}{\sin(xy)} - \frac{x}{y}$ olur.
(c) $y = y(x)$ fonksiyonu bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde verilen denklemin türevlenebilir bir çözümü, yani $x \in I$ için

$$y(x) - x = \varepsilon \sin y(x)$$

olsun. Bu eşitlikte her iki tarafın x e göre türevini alalım. O halde,

$$y'(x) - 1 = \varepsilon y'(x)\cos y,\ x \in I \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}$$

olur.

(d) $y = y(x)$ fonksiyonu bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde verilen denklemin türevlenebilir bir çözümü, yani $x \in I$ için

$$x + y(x) = e^{x - y(x)}$$

olsun. Bu eşitlikte her iki tarafın x e göre türevini alalım. O halde,

$$(e^{x-y} + 1)y'(x) = e^{x-y} - 1, x \in I \Rightarrow y'(x) = \frac{e^{x-y} - 1}{e^{x-y} + 1} = \frac{x + y - 1}{x + y + 1}$$

olur.

(e) $y = y(x)$ fonksiyonu bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde verilen denklemin türevlenebilir bir çözümü, yani $x \in I$ için

$$\arctan(x^2 + (y(x))^2) - \ln(xy(x)) - 1 = 0$$

olsun. Bu eşitlikte her iki tarafın x e göre türevini alalım. O halde,

$$\frac{2x + 2yy'(x)}{1 + (x^2 + y^2)^2} - \frac{y + xy'(x)}{xy} = 0, x \in I \Rightarrow$$

$$y'(x) = \frac{2x^2 y - y - y(x^2 + y^2)^2}{x + x(x^2 + y^2)^2 - 2xy^2}$$

olur. $\diamond$

(5) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonlarının terslerinin türevlerini ve onların tanım kümelerini bulunuz.

(a) $y = x + \ln x, x > 0$; (b) $y = 2x^2 - x^4, x > 1$.

Çözüm: (a) Verilen fonksiyon $\mathbb{R}_+$ üzerinde sürekli ve $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ olur. Bu durumda (4.17) den dolayı $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{x}{1 + x},\ D((f^{-1})') = \mathbb{R}$$

olur.

(b) Verilen fonksiyon $(1,+\infty)$ üzerinde sürekli ve $\forall x \in (1,+\infty)$ için $f'(x) = 4x(1-x^2) < 0$ olur. $f^{-1} : (-\infty, 1) \to (1,+\infty) : f^{-1}(y) = \sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ ters fonksiyonun türevi (4.17) ye göre

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{4x(1-x^2)}, D((f^{-1})') = (-\infty, 1)$$

olur. $\diamond$

(6) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $x = f^{-1}(y)$ fonksiyonlarının karşılarında yazılı noktalarda türevlerini bulunuz.

(a) $y = x + \frac{1}{5}x^5, y_0 = 0$; (b) $y = 2x^2 - x^4, x > 1, y_0 = -1$.

Çözüm: (a) $y_0 = 0$ olduğundan, $y = x + \frac{1}{5}x^5$ eşitliğinden $x_0 = 0$ olur. Buna göre, $f'(x) = 1 + x^4 \Rightarrow f'(x_0) = 1 \neq 0$ olduğundan, (4.17) den dolayı

$$(f^{-1}(0))' = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

olur.

(b) $y_0 = -1$ olduğundan, $y = 2x^2 - x^4$ eşitliğinden $x_0 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ olur. Buna göre, $f'(x) = 4x(1-x^2) \Rightarrow f'(x_0) = -4\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}} \neq 0$ olduğundan, (4.17) den dolayı

$$(f^{-1}(-1))' = \frac{1}{f'(\sqrt{1+\sqrt{2}})} = -\frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

olur. $\diamond$

(7) Aşağıdaki fonksiyonların apsisleri karşılarında yazılı noktalarda teğet ve normal denklemlerini yazınız.

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x_0 = 2$; (b) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -\frac{1}{2}$.

Çözüm: $f : (a,b) \to \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine $(x_0, f(x_0))(x_0 \in (a,b))$ noktasında çizilen teğet ve normal denklemleri $f'(x_0) \neq 0$ olmak üzere sırasıyla

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ve

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

denklemleri yardımıyla verilir.
(a) $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, f(2) = \frac{1}{5}, f'(2) = -\frac{4}{25}$ olduğuna göre, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ fonksiyonunun grafiğine $(2, \frac{1}{5})$ noktasında çizilen teğet ve normal denklemleri sırasıyla

$$y = \frac{1}{5} - \frac{4}{25}(x - 2) \text{ ve y} = \frac{1}{5} + \frac{25}{4}(\mathrm{x} - 2)$$

olur.
(b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f(-\frac{1}{2}) = -2, f'(-\frac{1}{2}) = -4$ olduğuna göre, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğine $(\frac{-1}{2}, -2)$ noktasında çizilen teğet ve normal denklemleri sırasıyla

$$y = -2 - 4(x + \frac{1}{2}) \text{ ve y} = -2 + \frac{1}{4}(\mathrm{x} + \frac{1}{2})$$

olur. $\diamond$

(8) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x, & |\, x \,| \leq 2 \text{ ise,} \\ \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{x}, & |\, x \,| > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun

(a) her yerde sürekli,

(b) her yerde türevlenebilir

olması için α ve β ne olmalıdır?

Çözüm: f fonksiyonunun herhangi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ üzerinde hem sürekli hem de türevlenebilir olması açıktır. Bu fonksiyonun -2 ve 2 noktalarında sürekli olması için

$$f(-2^-) = f(-2^+) = f(-2) \text{ ve } \mathrm{f}(2^-) = \mathrm{f}(2^+) = \mathrm{f}(2)$$

koşullarını sağlamak zorundadır. $f(-2^-) = -\frac{1}{6}, f(-2^+) = f(-2) = -8\alpha - 2\beta$ ve $f(2^-) = f(2) = 8\alpha + 2\beta, f(2^+) = \frac{1}{6}$ olduğuna göre, f nin -2 ve 2 noktalarında ve dolayısıyla, her yerde sürekli olması için $8\alpha + 2\beta = \frac{1}{6}$ olmalıdır. Verilen fonksiyonun -2 ve 2 noktalarında türevlenebilir olması için önce bu fonksiyon her yerde sürekli ve $f'(-2^-) = f'(-2^+), f'(2^-) = f'(2^+)$ koşullarını sağlamak zorundadır. Buna göre, $f'(-2^-) = f'(2^+) = \frac{-1}{2\sqrt{3}\pi}$ ve $f'(-2^+) = f'(2^-) = 12\alpha + \beta$ olduğundan α ve β sayıları için

$$\begin{cases} 12\alpha + \beta = \frac{-1}{2\sqrt{3}\pi} \\ 4\alpha + \beta = \frac{1}{12} \end{cases}$$

denklem sistemini sağlamalıdır. Demek ki, fonksiyonun heryerde türevlenebilir olması için

$$\alpha = -\frac{2\sqrt{3} + \pi}{96\pi}, \beta = \frac{2\sqrt{3} + 3\pi}{24\pi}$$

olmalıdır. $\diamond$

(9) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\alpha x), & |\, x \,| \leq 1 \text{ ise,} \\ \beta \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, & |\, x \,| > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 1$ ve $x = -1$ noktalarında türevlenebilir olması için α ve β ne olmalıdır?

Çözüm: Verilen fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevlenebilir olması için önce bu fonksiyon $x = 1$ noktasında sürekli ve $f'(1^-) = f'(1^+)$ koşullarını sağlamak zorundadır. Buna göre, $f(1^-) = f(1) = \arctan\alpha, f(1^+) = \beta$ ve $f'(1^-) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}, f'(1^+) = \frac{1}{2}$ olduğundan, α ve β sayıları için

$$\begin{cases} \arctan\alpha = \beta \\ \frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

denklem sistemini sağlamalıdır. Demek ki, fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevlenebilir olması için

$$\alpha = 1, \beta = \frac{\pi}{4}$$

olmalıdır. Benzer şekilde, verilen fonksiyonun $x = -1$ noktasında türevlenebilir olması için $\alpha = 1, \beta = \frac{\pi-4}{4}$ olduğu gösterilebilir. ◇

(10) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde türevlenebilir, $x \in (a,b)$, $x < \alpha_n < \beta_n, (n = 1, 2, \cdots)$ ve $n \to \infty$ iken $\alpha_n \to x, \beta_n \to x$ olsun. Eğer, $(\frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n})$ dizisi sınırlı ise,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x)$$

dir. İspatlayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(x) \Rightarrow t_n \in (a,b)\backslash\{x\}, n = 1, 2, \cdots$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = x$ koşullarını sağlayan her (t_n) dizisi için

$$f(t_n) = f(x) + f'(x)(t_n - x) + \varepsilon_n(t_n - x), \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

olacak şekilde bir (ε_n) dizisi vardır. O halde,

$$f(\alpha_n) = f(x) + f'(x)(\alpha_n - x) + {\varepsilon_n}^1(\alpha_n - x), \lim_{n\to\infty} {\varepsilon_n}^1 = 0$$

ve

$$f(\beta_n) = f(x) + f'(x)(\beta_n - x) + {\varepsilon_n}^2(\beta_n - x), \lim_{n\to\infty} {\varepsilon_n}^2 = 0$$

olacak şekilde $({\varepsilon_n}^1)$ ve $({\varepsilon_n}^2)$ dizileri mevcut olacaktır. Son iki eşitlikten

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x) + {\varepsilon_n}^2 \frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n} - {\varepsilon_n}^1 \frac{\alpha_n - x}{\beta_n - \alpha_n}$$

elde ederiz. $x < \alpha_n < \beta_n$ ve $(\frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n})$ dizisi sınırlı olduğundan, $(\frac{\alpha_n - x}{\beta_n - \alpha_n})$ dizisi de sınırlıdır. Buradan (sınırlı bir dizi ile sonsuz küçük bir dizinin çarpımıda sonsuz küçük bir dizi olduğundan)

$$\lim_{n\to\infty} [{\varepsilon_n}^2 \frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n} - {\varepsilon_n}^1 \frac{\alpha_n - x}{\beta_n - \alpha_n}] = 0$$

olduğu, dolayısıyla, istenen eşitliğin doğruluğu anlaşılır. ◇

4.2.2 Ek Problemler

(11) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların türevlerini bulunuz. Türevin varolduğu kümeyi gösteriniz.

(a) $y = (3x-7)^{10}$; (b) $y = x\sqrt[3]{x^2+1}$;

(c) $y = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$; (d) $y = e^{x^2}\cos 2x$;

(e) $y = \frac{\tan x}{\cot 2x}$; (f) $y = \ln[\ln(\ln x)]$;

(g) $y = \sin(\arcsin x)$; (h) $y = \cot(\text{arccotx})$;

(i) $y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$; (j) $y = \arctan\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

(k) $y = (\sin x)^{\cos x}$; (l) $y = \tanh(\cos x)$;

(m) $y = \frac{\cosh x^2}{\sinh^2 x^2} - \ln\coth\frac{x^2}{2}$; (n) $y = \cot(x^2) - \frac{1}{2}\tan^3(2x)$;

(o) $y = {\log_2}^3(2x+3)^2$; (p) $y = \sin|\ln x|$;

(q) $y = \cos(\frac{1}{\log_2 x})$; (r) $y = 3^{\cos^2 x}$;

(s) $y = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln(\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x})$; (t) $y = \arcsin\frac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\cos x}$;

(u) $y = \frac{1}{\sin\alpha}\ln\frac{1+x}{1-x} - \cot\alpha\ln\frac{1+x\cos\alpha}{1-x\cos\alpha}$; (v) $y = \ln\frac{x^2+a}{\sqrt{x^4+b^2}} + \frac{a}{b}\arctan\frac{x^2}{b}$;

(w) $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{|a|}$; (x) $y = x^{x^2}$;

(y) $y = |\sin x|^{\cos x}$; (z) $y = 2^{x^x}$.

Cevap:

(a) $y' = 30(3x-7)^9,\ \mathbb{R}$; (b) $y' = \frac{5x^2+3}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}},\ \mathbb{R}$;

(c) $y' = \frac{2x^2}{x^6-1}\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}},\ \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$; (d) $y' = 2e^{x^2}(x\cos 2x - \sin 2x),\ \mathbb{R}$;

(e) $y' = \frac{4\tan x(1+\tan^2 x)}{(1+\tan^2 x)^2},\ x \neq \frac{n\pi}{4}, n\in\mathbb{Z}$; (f) $y' = \frac{1}{x\ln x[\ln(\ln x)]},\ x > e$;

(g) $y' = 1, [-1,1]$; (h) $y' = 1,\ \mathbb{R}$;

(i) $y' = -\frac{\arccos x}{x},\ (-1,1)\backslash\{0\}$; (j) $y' = \frac{1}{2(1+x^2)},\ \mathbb{R}$;

(k) $y' = (\sin x)^{\cos x-1}(\cos^2 x - \sin^2 x\ln\sin x), 2n\pi < x < \pi+2n\pi, n\in\mathbb{Z}$;

(l) $y' = -\frac{\sin x}{\cosh^2(\cos x)},\ \mathbb{R}$; (m) $y' = \frac{4x}{\sinh^3 x^2},\ \mathbb{R}\backslash\{0\}$;

(n) $y' = (\frac{-2}{\sin^2 x} + \frac{\tan^2 2x}{\cos^2 2x}), x \neq \frac{\pi}{4}+n\pi,\quad x\neq n\pi, n\in\mathbb{Z}$;

(o) $y' = \frac{12}{\ln 2}\frac{{\log_2}^2(2x+3)^2}{2x+3}, \mathbb{R}\backslash\{\frac{-3}{2}\}$; (p) $y' = \frac{\cos|\ln x|}{x},\ \mathbb{R}_+$;

(q) $y' = \frac{\sin(\frac{1}{\log_2 x})}{(x{\log_2}^2)\ln 2},\ x>0, x\neq 1$; (r) $y' = -(\ln 3)\sin 2x.3^{\cos^2 x},\ \mathbb{R}$;

(s) $y' = \frac{1}{a+b\cos x}, b^2-a^2>0,\quad x\neq\pm\arccos\frac{a}{b}+2k\pi, n\in\mathbb{Z}$;

(t) $y' = \frac{\cos x - \cos\alpha}{|\cos x - \cos\alpha|} \cdot \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha\cos x}$; (u) $y' = \frac{2\sin\alpha}{(1-x)^2(1-x^2\cos^2\alpha)}, (-1,1)$;
(v) $y' = \frac{2(a^2+b^2)x}{(x^2+a)(x^4+b)^2}$, $\mathbb{R}$; (w) $y' = 2\sqrt{a^2-x^2}, \mid x \mid < \mid a \mid$;
(x) $y' = x^{1+x^2}(1+2\ln x)$, $\mathbb{R}_+$;

(y) $y' = \mid \sin x \mid^{\cos x} (\cos x \cot x - \sin x \ln \mid \sin x \mid)$, $x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$;
(z) $y' = (\ln 2) 2^{x^x} x^x (1 + \ln x)$, $\mathbb{R}_+$.

(12) Aşağıda parametrik denklemlerle verilen $y = y(x)$ fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.

(a) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = t^3, \quad t \in \mathbb{R} \ ; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = t^2 + 6t + 5 \\ y = t^2 - 54t^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \ ; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = \ln\sin\frac{t}{2} \\ y = \ln\sin t, \quad 0 < t < \pi \ ; \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}, t \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\} \ ; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \ . \end{cases}$

Cevap:

(a) $y'_x = -3t^2e^t$; (b) $y'_x = 1 - \frac{3}{t^2} + \frac{9}{t^2}$;
(c) $y'_x = \frac{2\cos t}{1+\cos t}$; (d) $y'_x = \frac{2t-t^4}{1-2t^3}$;
(e) $y'_x = \begin{cases} 1, & t > 0 \text{ ise,} \\ -1, & t < 0 \text{ ise .} \end{cases}$

(13) Aşağıdaki eşitliklerde kapalı şekilde tanımlanan $y = y(x)$ fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.

(a) $y^5 + y^3 + y - x = 0$; (b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, y > 0$;
(c) $(2a-x)y^2 = x^3, y < 0$; (e) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, y > 0$;
(e) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0, \quad y < -1$.

Cevap:

(a) $y'(x) = \frac{1}{5y^4+3y^2+1}$; (b) $y'(x) = \frac{b^2x}{a^2y}, \mid x \mid > a$;
(c) $y'(x) = \frac{(3a-x)y}{(2a-x)x}, 0 < x < 2a$; (d) $y'(x) = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}, \mid x \mid < a, x \neq 0$;
(e) $y'(x) = \frac{5}{9}\frac{3-x}{y+1}, \mid x - 3 \mid < 3$.

(14) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $x = f^{-1}(y)$ fonksiyonlarının karşılarında yazılı noktalarda türevlerini bulunuz.
(a) $y = 2x - \frac{1}{2}\cos x, y_0 = \frac{1}{2}$; (b) $y = x + \ln x, x > 0, y_0 = 1$.

Cevap: (a) $(f^{-1})'(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$; (b) $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$.

(15) Aşağıdaki fonksiyonların apsisleri karşılarında yazılı noktalarda teğet ve normal denklemlerini yazınız.
(a) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, x_0 = \sqrt{2}$; (b) $f(x) = \cos 2x - 2\sin x, x_0 = \pi$.

Cevap: (a) $y = -\frac{2}{9}x + \frac{8\sqrt{2}}{9}$, $y = \frac{9}{2}x - \frac{23\sqrt{2}}{6}$;
(b) $y = 1 - 2\pi + 2x$, $y = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x$.

(16) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta x^2, & \mid x \mid < 1 \text{ ise}, \\ \frac{1}{|x|}, & \mid x \mid \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun
(a) her yerde sürekli, (b) her yerde türevlenebilir
olması için α ve β ne olmalıdır?

Cevap: (a) $\alpha + \beta = 1$; (b) $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$.

(17) Aşağıdaki fonksiyonların her yerde türevlenebilir olması için α ve β ne olmalıdır.

$$\text{(a)} \ f(x) = \begin{cases} (x+\alpha)e^{-\beta x}, & x < 0 \text{ ise}, \\ \alpha x^2 + \beta x + 1, & x \geq 0 \text{ ise}; \end{cases}$$

$$\text{(b)} \ f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < 0 \text{ ise}, \\ \alpha \cos x + \beta \sin x, & x \geq 0 \text{ ise}. \end{cases}$$

Cevap: (a) $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$; (b) $\alpha = \beta$.

(18) $[a, b]$ üzerinde tanımlanan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ için $\mid f(x_1) - f(x_2) \mid \leq A \mid x_1 - x_2 \mid^{1+\alpha}$ olacak şekilde $A \geq 0$ ve $\alpha > 0$ sabit sayıları varsa f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sabit bir fonksiyondur. Gösteriniz.

(19) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

(a) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + \alpha(x; \Delta x)$

(b) $| \alpha(x; \Delta x) | \leq C \mid \Delta x |^2$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır. Bu koşullar sağlandığında $f(x) = Ax + B$ olduğunu gösteriniz.

(20) $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. $a < \alpha_n < x < \beta_n$ $(n \in \mathbb{N})$ ve $n \to \infty$ iken $\alpha_n \to x$, $\beta_n \to x$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x)$$

dir. İsapatlayınız.

4.3 Yüksek Mertebeden Türevler ve Diferensiyeller

Eğer, $f : [a, b] \to \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonu her $x \in [a, b]$ noktasında (a' da sağdan ve b'de soldan) türevlenebiliyorsa, f nin $[a, b]$ üzerinde tanımlı ve türev fonksiyonu denilen yeni bir $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu meydana geldiğini biliyoruz.(Bkz. Bölüm 4.1). Eğer, $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde (a da sağdan ve b de soldan) türevlenebiliyorsa, $(f')' : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna f nin 2. mertebeden türevi denir ve y'', $f''(x), D_2f(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ sembollerinin birisi ile gösterilir.

Tanım 4.3.1 : *$f : [a, b] \to \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde (a da sağdan ve b de soldan) $n - 1$. mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer, $f^{(n-1)} : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde (a da sağdan ve b de soldan) türevlenebiliyorsa, bu fonksiyonun $(f^{(n-1)})' : [a, b] \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonuna f nin n. mertebeden türevi denir ve $y^{(n)}, f^{(n)}(x), D_nf(x), \frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^nf(x)}{dx^n}$ sembollerinden birisi ile gösterilir. Verilen bir f fonksiyonunun 0. mertebeden türevi de f nin kendisi olarak, yani $f^{(0)} = f$ gibi tanımlanır.*